

اصول شبیه سازی

فاز چهارم: تجزیه تحلیل
داده‌های خروجی

1



مقدمه

- ورودیهای تصادفی منجر به خروجیهای تصادفی می شوند. **RIRO**
- اجراهای شبیه سازی در حقیقت به ما کمک می کند تا بتوانیم معیارهای عملکرد خروجی **performance measures of system** را **برآورد** کنیم.
- آنچه در تحلیل خروجیهای شبیه سازی وجود دارد در واقع همان مباحث **استنباط آماری** است.
- این خروجیها یا برآوردها خود تصادفی هستند بنابراین دارای **خطای نمونه گیری** **sampling error** هستند.
- در استنباط آماری باید **خطای نمونه گیری** **sampling error** را در نظر گرفت.

2

مقدمه

- در این بخش یاد خواهیم گرفت چگونه جمع آوری داده های مناسب با یک تحلیل قوی و معتبر آماری تکمیل خواهد شد.
- **نیاز به تحلیل آماری خروجیها**
 - تجزیه و تحلیل خروجیهای یک طرح **Output Analyzer**
 - مقایسه دو یا چند طرح مختلف **output Analyzer**
 - بررسی سناریوهای مختلف و تحلیل عوامل موثر بر خروجیها **Process Analyzer (PAN)**
 - جستجوی جواب بهینه مساله **Optquest**
- بسیاری از اوقات تحلیل خروجیهای شبیه سازی در نظر گرفته نمی شود این مساله متعارف و کاملاً اشتباه می باشد:
 - هیچ ایده ای درباره دقت نتایج ارائه نخواهد شد.
 - انجام تحلیل خروجیها به هیچ عنوان هزینه و زمان زیادی از سیستم را در بر نخواهد گرفت.

3

طبقه بندی شبیه سازیها

- دو طبقه مهم از شبیه سازی از دیدگاه فریم زمانی انجام شبیه سازی وجود دارد:
 1. **شبیه سازی متناهی: Terminating**
 2. **شبیه سازی وضعیت پایا: Steady State**
- حتماً باید منظور و هدف از شبیه سازی را تعریف کنیم تا بتوان یکی از دو روش مناسب فوق را انتخاب نمود.
- انتخاب هر یک از دو روش فوق در نحوه انجام تحلیلهای خروجی کاملاً موثر است.

4

Terminating Simulation

1. شبیه سازی متناهی Terminating

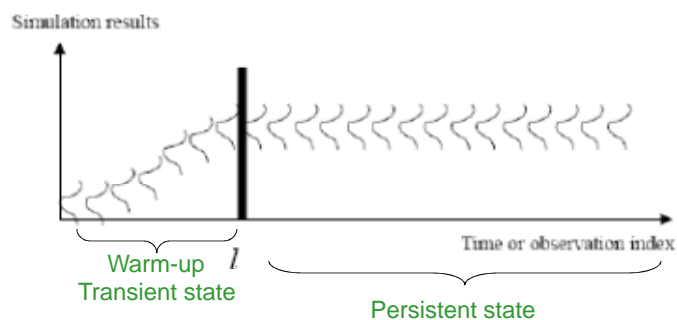
- یک نوع خاص از شبیه سازی که مدل شرایط ورود و خروج را به صورت بازتاب دقیقی از آنچه در سیستم رخ می دهد تعیین می کند.
- همانطور که از نام آن پیداست شبیه سازی با اعمال شرایط از پیش تعیین شده ای آغاز و خاتمه می یابد.

• مثال:

به عنوان مثال فروشگاه های که هر روز صبح ساعت 9 باز می شود و در لحظه شروع هیچ مشتری در آن نیست (حالت گذار **Transient state**) را در نظر بگیرید این فروشگاه ساعت 8 نیز می بندد اما گاهی زمانی بیش از 8 برای مشتریانی که در سیستم هستند سرویس می دهد یک مثال مناسب برای شبیه سازی متناهی تلقی می شود که در آن یک پیشامد طبیعی طول تکرار را مشخص می کند.

5

طبقه بندی شبیه سازیها



6

Steady State Simulation

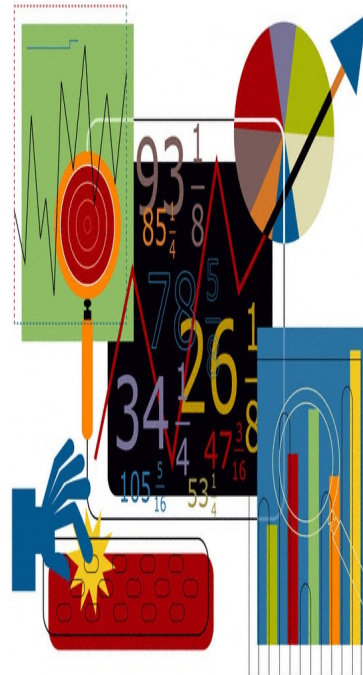
- در این شبیه سازی برای برآورد پارامترها و تحلیل نتایج از شبیه سازی در مدت زمان طولانی **long term** (از دیدگاه تئوریک **Infinite**) استفاده می شود.
- شرایط اولیه موجب ایجاد Bias و افزایش واریانس و بزرگ بودن فواصل اطمینان می شود پس باید آن را حذف نمود
- اما در اکثر کاربردهای عملی چون شبیه سازی در بلند مدت انجام می شود، بنابراین شرایط اولیه اثر معنی داری ندارد.
- **مثال**

به عنوان مثال شبیه سازی یک واحد اورژانس که در هر لحظه از زمان آماده سرویس دهی است یک نمونه واقعی از شبیه سازی وضعیت-ثابت است.

7

اصول شبیه سازی

فاز چهارم: تجزیه تحلیل
داده های خروجی شبیه سازی
TERMINATING



8

تحلیل آماری خروجیها

- تجزیه و تحلیل خروجیهای یک طرح (استنباط آماری یک سناریو یا یک جامعه)
 - میانگین و واریانس نمونه ای. فاصله اطمینان برای یک جامعه - ماکزیمم - مینیمم و...
- مقایسه دو یا چند طرح مختلف (استنباط آماری دو یا تعداد محدودی سناریو)
 - فاصله اطمینان برای دو جامعه وابسته و مستقل. آنالیز واریانس - فواصل هم زمان
- بررسی سناریوهای مختلف و تحلیل عوامل موثر بر خروجیها (استنباط آماری تعداد نسبتاً زیادی سناریو و رتبه بندی آنها)
 - Ranking & Selection
- جستجوی جواب بهینه مساله (جستجوی سناریوی بهینه از تعداد خیلی زیادی یا بینهایت سناریو)
 - Simulation Optimization

9

تجزیه و تحلیل خروجیهای یک مدل

- For now, assume we obtain discrete simulation output Y_1, Y_2, \dots, Y_m , where the number of observations m can be a constant or a random variable.

$$\bar{Y}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i$$

$$S^2(m) = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^2$$

$$\bar{Y}_m \pm t_{m-1, \alpha/2} \frac{S_m(Y)}{\sqrt{m}}$$

- This interval has half-width

$$d(a, m) = t_{m-1, a/2} \frac{S_m(Y)}{\sqrt{m}}$$

10

H1

SIMULATION

تفسیر فواصل اطمینان

- فواصل اطمینان بازه های **تصادفی** (دارای نقاط end-point تصادفی) برای پارامترهای یک توزیع (مثلا μ)، به نحویکه احتمال اینکه این بازه ها شامل مقدار μ شود برابر است با 95%.
- مقدار μ غیر تصادفی اما نا معلوم است.
- یک فاصله اطمینان با احتمال 95% شامل یک مشاهده نیست. چنین فاصله ای فاصله پیش بینی نامیده می شود و با فاصله اطمینان فرق می کند.
- در شبیه سازی نمی توان فرض نمود که مشاهدات از توزیع نرمال تبعیت می کنند
- اگر خروجیها میانگین یا مجموع یک سری مشاهده باشند فرض فوق می تواند صحیح باشد. از قضیه حد مرکزی نیز می توان استفاده نمود. (در شبیه سازی terminating اینگونه است).

11

تجزیه و تحلیل خروجیهای یک مدل

- برای شبیه سازی اخیر هر دو گزینه Initialize Between Replications را انتخاب می کنیم. با این کار هر یک از تکرارها مستقل و هم توزیع iid خواهد بود.
- نتایج به طور مجزا برای هر تکرار در گزینه Category by Replication report به دست می آید.
- **Example: Total cost, percent rejected; 10 replications**

Replication	Total Cost (\$)	Percent Rejected
1	21,281.24	12.6836
2	20,612.12	11.6059
3	20,023.67	9.2958
4	25,834.40	17.6084
5	24,748.90	13.3240
6	19,667.52	13.0201
7	19,565.40	11.0803
8	23,145.32	12.2655
9	19,931.75	9.6403
10	20,667.84	12.7830

12

SIMULATION

H1

why point 3???

H.Pasha, 6/18/2009

فواصل اطمینان برای شبیه سازیهای متناهی

- همانطور که در خروجیها مشاهده شد نتایج شبیه سازی شامل 5 پارامتر اصلی نمونه ها به شرح زیر است:

	Total Cost (\$)	Percent Rejected
Sample Mean	21,547.82	12.33
Sample Standard Deviation	2,243.38	2.31
95% Confidence Interval Half Width	1,604.82	1.66
Minimum Summary Output Value	19,565.40	9.30
Maximum Summary Output Value	25,834.40	17.61

- به طور کلی فواصل اطمینان می تواند دو عیب اصلی داشته باشد:
 - 1- بازه اطمینان به دست آمده وقتی تکرارها کم است ($m < 100$)، غیر منطقی و بزرگ خواهد بود.
 - 2- مقدار متوسط لزوما مقدار صحیح نیست و این گاهی اوقات تحلیلها را مشکل میکند.

13

استراتژی تحلیل خروجی داده ها

- گزینه **Category Overview report** برخی نتایج آماری مربوط به تمام تکرارها را گزارش می دهد.
 - روشهای به دست آوردن تعداد تکرارها m
 - روش سعی و خطا
 - روش یافتن اندازه نمونه تقریبی برای یک سطح دقت خاص
 - نمونه گیری متوالی
- در Arena چنانچه بخواهیم تعداد تکرار زیادی داشته باشیم می توان از سریعترین حالت ممکن استفاده نمود که به صورت زیر قابل اجرا می باشد:
- *Run > Run Control > Batch Run (No Animation)*

14

SIMULATION

15

نصف فاصله و اندازه تکرار

SIMULATION

- Prefer smaller confidence intervals — *precision*

- Notation:

m = no. replications

\bar{Y}_m = sample mean

$S_m(Y)$ = sample standard deviation

$t_{m-1, 1-\alpha/2}$ = critical value from t tables

- Confidence interval: $\bar{Y}_m \pm t_{m-1, 1-\alpha/2}$

- Half-width = $t_{m-1, 1-\alpha/2} \frac{S_m(Y)}{\sqrt{m}}$

Want this to be "small," say $\leq h$ where h is prespecified

- Can't control t or s

- Must increase m — how much?

16

نصف فاصله و اندازه تکرار

- افزایش اندازه نمونه می تواند دقت شبیه سازی را بالا ببرد و منجر به کاهش طول نصف فاصله و خطای استاندارد شود. به عنوان مثال اگر هزینه کل یا total cost میانگینی برابر با \$21547.82 و انحراف معیاری برابر با \$2243.38 داشته باشد یک نصف فاصله 95% برای آن عبارت است از:

$$t_{m-1, \alpha/2} \frac{S_m(Y)}{\sqrt{m}} = 2.262 \times \frac{2243.38\$}{\sqrt{10}} = 1604.71\$$$

و مقدار **خطا** در برآورد نقطه ای میانگین وجود دارد.

$$e = \frac{h}{\bar{Y}_m} = \frac{1604.71\$}{21547.82\$}$$

- چنانچه بخواهیم نصف فاصله دیگری غیر از h_0 به دست آوریم آنگاه تعداد تکراری برابر با رابطه زیر را شبیه سازی کرد:

$$m = t_{m-1, 1-\alpha/2}^2 \frac{S^2}{h^2}$$

17

نصف فاصله و اندازه تکرار

- اما به دست آوردن m از رابطه قبل یک مشکل دارد: مقادیر t و S هر دو تابعی از m هستند بنابراین نمی توان آنها را مستقیماً جست. یک روش سعی و خطا است و روش دیگر نیز استفاده از تقریب نرمال برای توزیع t می باشد.

$$m \cong Z_{1-\alpha/2}^2 \frac{S_{m_0}^2(Y)}{h^2}$$

s = sample standard deviation from "initial" number m_0 of replications

- تقریب ساده دیگری نیز وجود دارد که به صورت زیر است:

$$m \cong m_0 \frac{h_0^2}{h^2}$$

h_0 = half width from "initial" number m_0 of replications

m grows quadratically as h decreases

18

نصف فاصله و اندازه تکرار

- **Example:** contact center
 - From initial 10 replications, 95% half-width on Total cost was ± 1605 (7.4% of $X = 21,548$)
 - Let's get the error equal to 1%
 - $0.01 * 21548 = 215.48$
 - First formula: $m \cong 1.96^2 (2243.38^2 / 215.48^2) = 416.38$, so 417
 - Second formula: $m \cong 10 (1605^2 / 215.48^2) = 554.61$, so 555
 - Modified Model
 - In Run > Setup > Replication Parameters, changed Number of Replications to 555 (conservative based on above)
 - Got 22053 ± 179.32 , satisfying criterion (overshot a bit?)
 - BTW, from 417 replications got $22093. \pm 214.32$
 - Use max of sample sizes for precisions on multiple outputs

نصف فاصله و اندازه تکرار

The efficacy of this method depends on the closeness of $S^2_{m0}(Y)$ to the unknown $\text{Var}(Y_i)$:

- If $S^2_{m0}(Y)$ underestimates $\text{Var}(Y_i)$, then m will be smaller than actually needed.
- If $S^2_{m0}(Y)$ overestimates $\text{Var}(Y_i)$, then unnecessary replications will have to be made.
- In practice the sequential method appears to have the following advantages (Alexopoulos and Seila 1998):
 1. The resulting confidence interval half-width is less than or equal to the target value.
 2. The variation in the final sample sizes and confidence interval half-widths is substantially smaller.

Sequential Procedures

- **Absolute Error:** Suppose we would like to make k runs so that

$$\Pr(\bar{Y}_m - d \leq \mu \leq \bar{Y}_m + d) \geq 1 - \alpha, \quad \alpha \in (0,1), \quad d > 0$$

- Chow and Robbins (1965) showed that the *stopping rule*

$$m^* = \min \left[m \geq 2 : \delta(m, \alpha) \leq \sqrt{\frac{m^2 d^2 - t_{k-1, \alpha/2}^2}{m(m-1)}} \right]$$

$$\text{where } \delta(\alpha, m) = t_{m-1, \alpha/2} \frac{S_m(Y)}{\sqrt{m}}$$

$$\text{satisfies } \lim_{d \rightarrow 0} \Pr(\bar{Y}_{m^*} - d \leq \mu \leq \bar{Y}_{m^*} + d) \geq 1 - \alpha$$

Sequential Procedures

- The following simpler stopping rule works quite well in practice:

$$m^* = \min [m \geq 10 : \delta(m, \alpha) \leq d]$$

- *The implementation of sequential sampling in Arena is described in Chapter 12 of the text by KS&S. Page 525 through 529*

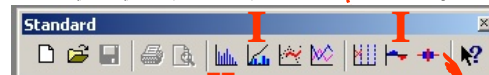
استفاده از Output Analyzer

• نوار ابزار Analyze

برای فیلتر نمودن مشاهدات بصورت انباشته و بررسی معنی دار بودن وابستگی زمانی داده ها

Histogram: هم ساده و هم تجمعی را می دهد.

ACF plot یا Correlogram.



Bar chart

Moving Average chart

برآورد فاصله ای

نمودار مشاهدات
در طول زمان

8 کار عملی با این گزینه ها

23

بررسی یک سناریو

برای به دست آوردن اطلاعات مربوط به total cost باید آن را به صورت فایل **dat** ذخیره کرد.

Statistics>output file>Total cost.dat

پسوند dat حتما باید باشد. همچنین خروجی را جایی تعریف کنید که بتوانید آن را بیابید.

مدل را برای 200 تکرار run کنید.

24

گزارشها

- به طور کلی Arena 4 نوع آماره مختلف برای خروجی گزارشات دارد:

1-Tally

Tally متغیرهایی مثل متوسط زمان انتظار، متوسط زمان پردازش و... که به ازای هر نهاد یک مقدار برای آن وجود دارد متغیرهای Tally نامیده می شود.

Time-persistent

متغیرهایی مانند متوسط تعداد افراد در صف، متوسط افراد در حال پردازش و مطلوبیت و.... که در هر لحظه از زمان ممکن است مقادیر آن تغییر کنند

Counter

متغیر شمارنده که تعداد ورودی و خروجی به یک ماژول را صرفاً می شمارد.

Outputs

وقتی چند replicate وجود دارد از این متغیر استفاده می شود.

25

مقایسه دو سناریو

Comparing 2 Scenarios

26

مقایسه میانگینهای دو جامعه

$X_i =$ **The first strategy.** Assume X_1, X_2, \dots, X_n i.i.d. normal with unknown mean μ_X and unknown variance.

$Y_i =$ **The second strategy.** Assume Y_1, Y_2, \dots, Y_m i.i.d. normal with unknown mean μ_Y and unknown variance.

Goal: Obtain confidence interval for $\mu_X - \mu_Y$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{and} \quad \bar{Y}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i \quad (\text{sample means})$$

$$S_n^2(X) = (\text{sample variance of } X\text{'s}) \quad \nu = \frac{[S_n^2(X)/n + S_m^2(Y)/m]^2}{\frac{[S_n^2(X)/n]^2}{n+1} + \frac{[S_m^2(Y)/m]^2}{m+1}}$$

$$S_m^2(Y) = (\text{sample variance of } Y\text{'s})$$

$$\mu_X - \mu_Y \in \bar{X}_n - \bar{Y}_m \pm t_{\nu, \alpha/2} \sqrt{\frac{S_n^2(X)}{n} + \frac{S_m^2(Y)}{m}},$$

27

مقایسه میانگینهای دو جامعه

$X_i =$ **The first strategy.** Assume X_1, X_2, \dots, X_n i.i.d. normal with unknown mean μ_X and unknown variance.

$Y_i =$ **The second strategy.** Assume Y_1, Y_2, \dots, Y_m i.i.d. normal with unknown mean μ_Y and unknown variance.

Goal: Obtain confidence interval for $\mu_X - \mu_Y$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{and} \quad \bar{Y}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i \quad (\text{sample means})$$

$$S_n^2(X) = (\text{sample variance of } X\text{'s}) \quad \nu = \frac{[S_n^2(X)/n + S_m^2(Y)/m]^2}{\frac{[S_n^2(X)/n]^2}{n+1} + \frac{[S_m^2(Y)/m]^2}{m+1}}$$

$$S_m^2(Y) = (\text{sample variance of } Y\text{'s})$$

$$\mu_X - \mu_Y \in \bar{X}_n - \bar{Y}_m \pm t_{\nu, \alpha/2} \sqrt{\frac{S_n^2(X)}{n} + \frac{S_m^2(Y)}{m}},$$

28

مقایسه میانگینهای دو جامعه

- Take n observations n from both strategies and set $D_i = X_i - Y_i$, for $i = 1, 2, \dots, n$.

$$\bar{D}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i \quad (\text{sample mean of } D_i)$$

$$S_n^2(D) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D}_n)^2$$

$$\mu_X - \mu_Y \in \bar{D}_n \pm t_{\alpha/2, n-1} \sqrt{\frac{S_n^2(D)}{n}}$$

29

مقایسه میانگینهای دو جامعه

- Trick:** Try to make X_i and Y_i positively correlated.

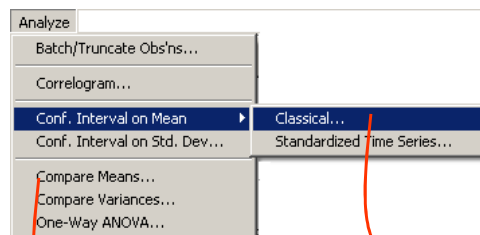
$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{D}_n) &= (1/n) \text{Var}(D_i) \\ &= (1/n) \text{Var}(X_i - Y_i) \\ &= [\text{Var}(X_i) + \text{Var}(Y_i) - 2\text{Cov}(X_i, Y_i)]/n \\ &< [\text{Var}(X_i) + \text{Var}(Y_i)]/n, \end{aligned}$$

- This trick may result in small $S_n^2(D)$ and, hence, small confidence interval length.
- The trick sometimes works if both scenarios are run under as nearly identical conditions as possible.
- This is known as *common random numbers*, and is often easy to do since we can control the simulation's random number streams.

30

مقایسه میانگینهای دو جامعه

• Output Analysis:



برای این مثال همیشه
Lumped با حالت
سر و کار داریم

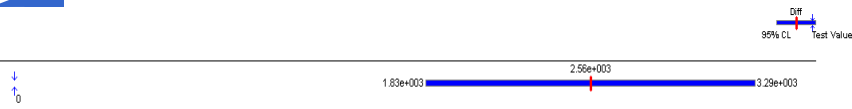
فواصل اطمینان هر مشخصه
را جداگانه ارائه می دهد

یک فاصله اطمینان برای اختلاف میانگینهای دو جامعه می دهد
که اگر فاصله شامل مقدار صفر باشد بنابراین دو جامعه یکسان
هستند

$$\bar{\bar{x}} - t_{\alpha/2, n-1} s / \sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{\bar{x}} + t_{\alpha/2, n-1} s / \sqrt{n}$$

مقایسه میانگینهای دو جامعه

• Output Analysis:



Paired-T Means Comparison :

IDENTIFIER	ESTD. MEAN DIFFERENCE	STANDARD DEVIATION	0.950 C.I. HALF-WIDTH	MINIMUM VALUE	MAXIMUM VALUE	NUMBER OF OBS
Total Cost	2.56e+003	3.68e+003	731	1.93e+004	3.9e+004	100
				1.93e+004	2.94e+004	100

REJECT H0 => MEANS ARE NOT EQUAL AT 0.05 LEVEL

33

مقایسه واریانسهای دو جامعه

- رابطه ای که در محاسبه برای بررسی برابری واریانس.
- فرض نرمال بودن نیاز است

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} f_{1-\alpha/2, n_2-1, n_1-1} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{s_1^2}{s_2^2} f_{\alpha/2, n_2-1, n_1-1}$$

34

مقایسه چند سناریو

Comparing $k > 2$ Scenarios

- ANOVA
- Multiple Comparison Procedures.
- Simultaneous Confidence Intervals:
 - Bonferroni.
 - Tukey-Kramer.
- Ranking and Selection Procedures.
 - Subset Selection
 - Indifference zone

35

ANOVA

- برای مقایسه برابری میانگینهای چند جامعه از ANOVA استفاده میکنیم. یک run شبیه سازی

Treatment	Observations	Totals	Averages
1	y_{11} y_{12} ... y_{1n}	$y_{1\cdot}$	$\bar{y}_{1\cdot}$
2	y_{21} y_{22} ... y_{2n}	$y_{2\cdot}$	$\bar{y}_{2\cdot}$
\vdots	\vdots \vdots ... \vdots	\vdots	\vdots
i	y_{i1} y_{i2} ... y_{in}	$y_{i\cdot}$	$\bar{y}_{i\cdot}$
a	y_{a1} y_{a2} ... y_{an}	$y_{a\cdot}$	$\bar{y}_{a\cdot}$
		$y_{\cdot\cdot}$	$\bar{y}_{\cdot\cdot}$

یک سناریو شامل n تکرار یا
run

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$$

$$H_0 : m_1 = m_2 = \dots = m_a \quad \text{or} \quad H_0 : \tau_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, a$$

$$H_1 : \text{At least one mean is different}$$

36

The Analysis of Variance

- Total variability** is measured by the total sum of squares:

$$SS_T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$$

- The basic ANOVA partitioning is:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n [(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + (y_{ij} - \bar{y}_{i.})]^2 \\ &= n \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 \\ SS_T &= SS_{Treatments} + SS_E \end{aligned}$$

37

The Analysis of Variance is Summarized in a Table

Table 3-3 The Analysis of Variance Table for the Single-Factor, Fixed Effects Model

Source of Variation	Sum of Squares	Degrees of Freedom	Mean Square	F_0
Between treatments	$SS_{Treatments} = n \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$	$a - 1$	$MS_{Treatments}$	$F_0 = \frac{MS_{Treatments}}{MS_E}$
Error (within treatments)	$SS_E = SS_T - SS_{Treatments}$	$N - a$	MS_E	
Total	$SS_T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$	$N - 1$		

$$F_0 > F_{a, a-1, a(n-1)}$$

مقایسه میانگینهای چند جامعه

- برای این کار در **Arena** باید یا دو مشخصه مشابه را به صورت فایل **dat** ذخیره کرد یا باید برای یک مشخصه با تغییر پارامترها دو بار شبیه سازی را **Run** نمود.

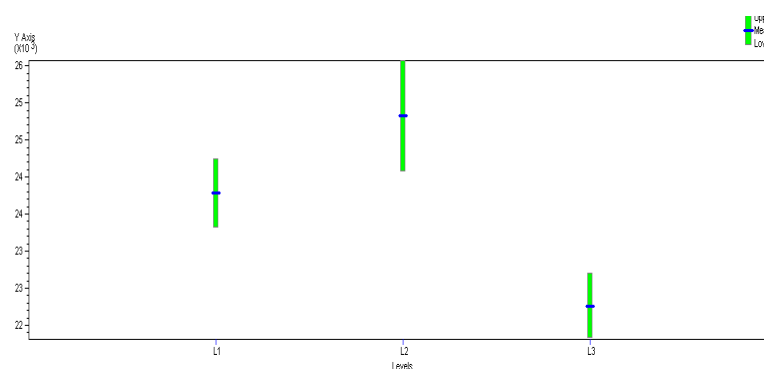
1- حالت اول بررسی اثر افزودن کارمندان اضافی در سیستم

- *Base case* – all inputs as original Model 5-3, no extra resources
- *More-resources case* – Add 3 trunk lines (29), 4 each of New Sales, New Tech 1, New Tech 2, New Tech 3, and New Tech All
- *Moderate-resources case* – Add 3 trunk lines (29), one for New Tech All

مدل را برای 100 تکرار **run** کنید. (Model: 6-4)

39

Anova



40

Anova

One-Way ANOVA Table :

L1 - Total Cost
L2 - Total Cost
L3 - Total Cost

SOURCE OF VARIATION	SUM SQUARES	DF	MEAN SQUARES	F-EXP
BETWEEN TREATMENTS	3.326e+008	2	1.663e+008	19.525
ERROR (W.TREATMENTS)	2.53e+009	297	8.52e+006	
TOTAL	2.863e+009	299	F-CRIT	3.026

REJECT H0 => NOT ALL MEANS ARE EQUAL AT 0.05 LEVEL

BONFERRONI METHOD OF MULTIPLE PAIRWISE COMPARISONS
** COMPARISONS PERFORMED AT THE 0.05 LEVEL **

LOWER LIMIT	UPPER LIMIT
-1994 < MU(1) - MU(2) <	-6.526
565 < MU(1) - MU(3) <	2553
1565 < MU(2) - MU(3) <	3553

41

مقایسات زوجی برای چند جامعه

Notation

- $i = 1, 2, \dots, k$ alternatives.
- Y_{ij} is the j th simulation output from system i .
- Outputs from system i (Y_{i1}, Y_{i2}, \dots) are i.i.d (implies replications).
- $\mu_i = E[Y_{ij}]$.
- $\sigma_i^2 = \text{Var}[Y_{ij}]$.
- $p_i = \Pr \{Y_{ij} > \max_{l \neq i} Y_{lj}\}$ when $Y_{1j}, Y_{2j}, \dots, Y_{kj}$ are mutually independent.

- **Multiple Comparison Method:** Doing all pair hypothesis tests for all pair scenarios

- **Problem:** Type I error inflation. Independent statistic
- $$\alpha_{\text{overall}} = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - \alpha_i)$$

42

مقایسات زوجی برای چند جامعه

Form simultaneous confidence intervals for

$$\mu_i = \mu_j, \text{ for all } i \neq j$$

Systems are simulated independently. i.i.d. outputs $Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{ni}$.

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}$$

$$S^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i - 1} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2 \quad \text{pooled variance estimator}$$

Tukey's simultaneous confidence intervals are

$$\bar{Y}_i - \bar{Y}_j \pm \frac{Q_{k,v}^{(a)}}{\sqrt{2}} S \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}; \quad v = \sum_{i=1}^k (n_i - 1)$$

43

Coverage $\geq 1 - \alpha$ for any values of the n_i .

مقایسات زوجی برای چند جامعه

- 95% Quantiles $Q_{k,v}^{(0.05)}$ of the Studentized Range Distribution

$\nu \backslash k$	3	4	5	6
5	4.60	5.22	5.67	6.03
10	3.88	4.33	4.65	4.91
15	3.67	4.08	4.37	4.60
20	3.58	3.96	4.23	4.45
30	3.49	3.85	4.10	4.30

44

مقایسات زوجی برای چند جامعه

EXAMPLE

Suppose that there are only $k = 4$ systems. For each, we take $n = 6$ replications, giving the following summary data on response time in milliseconds:

$$\bar{Y}_1 = 72, \quad \bar{Y}_2 = 85, \quad \bar{Y}_3 = 76, \quad \bar{Y}_4 = 62, \quad S^2 = 100.9.$$

Determine, with confidence 0.95, bounds on the difference between the expected response times of each alternative. Then Tukey's procedure forms CI's with half-widths

$$\frac{3.96}{\sqrt{2}} \sqrt{100.9 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right)} = 16,$$

- where $Q_{4,20}^{(0.05)} = 3.96$ is from Table 1. For instance, a CI for $\mu_2 - \mu_4$ is
- $85 - 62 \pm 16$, or 23 ± 16 . Since this confidence interval does not contain 0, assuming shorter response time is better, we can informally screen out System 2 from further consideration.

45

مقایسات زوجی برای چند جامعه

Bonferroni inequality:

$$p\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right) \leq \sum_{i=1}^k p(E_i) \quad k=2, \Rightarrow p(E_1 \cup E_2) \leq P(E_1) + P(E_2)$$

E_i : The probability of wrongly rejecting the i^{th} hypothesis.

$$\alpha_{\text{overall}} = p(E_1 \cup E_2) \leq 2\alpha \quad \alpha_{\text{overall}}/2 \leq \alpha$$

g number of confidence interval

$$\bar{Y}_i - \bar{Y}_j \pm t_{v, \alpha/2g} \sqrt{\frac{S_n^2(i)}{n_i} + \frac{S_n^2(j)}{n_j}}; \quad v = \sum_{i=1}^k (n_i - 1)$$

46

مقایسه تعداد زیادی آلترناتیو مختلف

Ranking & Selection

- گاهی اوقات تعداد سناریوها یا آلترناتیوها زیاد است. همچنین پارامترهایی که در خروجیها تاثیر می گذارند نیز متعدد است. در این صورت روشهای قبل کاربرد ندارد.

- به عنوان مثال چنانچه بخواهیم با تغییر متغیرهای **New Tech 1**, **New Tech 2**, **New Tech 3**, and **New Tech All** در سطوح مختلف حالتیهای مختلفی خواهیم داشت که تحلیل آن در شبیه سازی **Ranking & Selection** نام دارد.

1. Subset Selection
2. Indifference Zone

47

مقایسه تعداد زیادی آلترناتیو مختلف

Ranking & Selection

- We cannot guarantee a “correct selection”
- Instead two measures can be used: 1- **Probability of Correct Selection** 2- **Simulation Budget or replication**
- Y_{ij} : j th output from i^{th} system or scenario
- \mathbf{Y}_i =vector of Y_{ij}
- n outputs from each of k systems
- It is assumed that $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \dots \leq \mu_k$.

48

مقایسه تعداد زیادی آلترناتیو مختلف

Subset-Selection

- Selecting systems such that
 $\Pr\{k \in I\} \geq 1 - \alpha \quad 1/k < 1 - \alpha < 1$
- Ideally $|I|=1$. Gupta's solution. Choosing systems where

$$\bar{X}_I(n) \geq \max_{i \neq I} \bar{X}_i(n) - h\sigma\sqrt{\frac{2}{n}}$$
- $\bar{X}_I(n)$ is the sample mean of n outputs from system I
- h should be found:

$$\Pr\{k \in I\} = \Pr\left\{\bar{X}_k(n) \geq \max_{i \neq I} \bar{X}_i(n) - h\sigma\sqrt{\frac{2}{n}}\right\}$$

$$\Pr\{k \in I\} = \Pr\left\{\bar{X}_k(n) \geq \bar{X}_i(n) - h\sigma\sqrt{\frac{2}{n}}, \forall i \neq k\right\}$$

49

مقایسه تعداد زیادی آلترناتیو مختلف

Subset-Selection

$$= \Pr\left\{\frac{\bar{X}_i(n) - \bar{X}_k(n) - (\mu_i - \mu_k)}{\sigma\sqrt{2/n}} \leq h - \frac{(\mu_i - \mu_k)}{\sigma\sqrt{2/n}}, \forall i \neq k\right\}$$

$$\geq \Pr\{Z_i \leq h, i = 1, 2, \dots, k-1\} = 1 - \alpha$$

- $(Z_1, Z_2, \dots, Z_{k-1})$ have a **Multivariate Normal Variable** with mean 0, variance 1 and common pairwise correlation $1/2$.
- So h needs to be the $1-\alpha$ quantile of the maximum of such a multivariate normal dist.
- Why the above inequality is right?
- Disadvantage:** Set I may, and likely will contain more than one system.

50

مقایسه تعداد زیادی آلترناتیو مختلف

Indifference Zone

- There is no procedure that can guarantee a subset of size 1 such that $\Pr\{k \in I\} \geq 1 - \alpha$ $1/k < 1 - \alpha < 1$
- Instead we guarantee to select the best with probability $1 - \alpha$ when it is at least δ better. $(\mu_k - \mu_{k-1} \geq \delta)$.
- δ : is the smallest value we feel is worth detecting

Procedures:

1- From each system, take $n = \left\lceil \frac{2h\sigma^2}{\delta^2} \right\rceil$

2- Select the system with the largest sample mean as the best

h needs to be the $1-\alpha$ quantile of the maximum of such a multivariate normal dist.

51

مقایسه تعداد زیادی آلترناتیو مختلف

Subset-Selection

$$\begin{aligned}
 \Pr\{\text{select } k\} &= \Pr\{\bar{X}_k(n) \geq \bar{X}_i(n), \forall i \neq k\} \\
 &= \Pr\left\{\frac{\bar{X}_i(n) - \bar{X}_k(n) - (\mu_i - \mu_k)}{\sigma\sqrt{2/n}} < -\frac{(\mu_i - \mu_k)}{\sigma\sqrt{2/n}}, \forall i \neq k\right\} \\
 &\geq \Pr\left\{\frac{\bar{X}_i(n) - \bar{X}_k(n) - (\mu_i - \mu_k)}{\sigma\sqrt{2/n}} < \frac{\delta}{\sigma\sqrt{2/n}}, \forall i \neq k\right\} \\
 &\geq \Pr\left\{\frac{\bar{X}_i(n) - \bar{X}_k(n) - (\mu_i - \mu_k)}{\sigma\sqrt{2/n}} < h, \forall i \neq k\right\} \\
 &= \Pr\{Z_i < h, \forall i = 1, 2, \dots, k-1\} = 1 - \alpha
 \end{aligned}$$

52

The مقایسه تعداد زیادی آترناتیو مختلف

Boesel, Nelson, and Kim Procedure

$$\text{Set } t_i = t_{1-(1-a)^{1/(k-1)}, n_i-1}$$

$$\text{Set } W_{ij} = \sqrt{\frac{t_i^2 S_i^2}{n_i} + \frac{t_j^2 S_j^2}{n_j}}$$

Keep scenario i in the subset if

$$\bar{Y}_i \geq \bar{Y}_j - (W_{ij} - d)^+, \text{ for all } j \neq i$$

d : Error tolerance (also called the “indifference zone”)

A subset selection method with indifference zone!

Used in ARENA!!!

53

The مقایسه تعداد زیادی آترناتیو مختلف

Boesel, Nelson, and Kim Procedure

Suppose $n = 10$, $1 - a = 0.95$, $k = 3$

$\bar{Y}_1 = 10, \bar{Y}_2 = 8, \bar{Y}_3 = 5, S_i^2 = 10$ for all i

Set $t_i = t_{1-(0.95)^{1/(3-1)}, 10-1} = t_{0.025, 9} = 2.25$

$$\text{Set } W_{ij} = \sqrt{\frac{2.25^2 \times 10}{10} + \frac{2.25^2 \times 10}{10}} = 3.18$$

Keep scenario i in the subset if

$$\bar{Y}_i \geq \bar{Y}_j - (3.18 - d)^+, \text{ for all } j \neq i$$

54

The مقایسه تعداد زیادی آترناتیو مختلف

Boesel, Nelson, and Kim Procedure

If $d = 0$, then we retain scenarios 1 and 2

$$\bar{Y}_2 = 8 > 10 - 3.18 = 6.82$$

$$\bar{Y}_3 = 5 < 10 - 3.18 = 6.82$$

If $d = 2$, we retain only scenario 1

$$\bar{Y}_2 = 8 < 10 - (3.18 - 2)^+ = 8.82$$

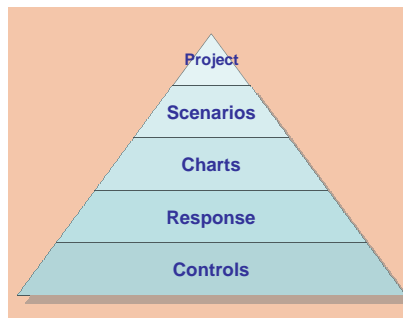
55

Controlling Error

- If our goal is to find the best, then we can increase the number of replications until the subset has only one scenario
- There is no direct way tell how many replications will be needed, but don't add fewer than 10 replications at a time

Process Analyzer (PAN)

- این نرم افزار کار خود را با شناسایی مدل توسط فایل **p** با پسوند ***.p** شروع می کند. این فایل در **Arena** ساخته می شود. چگونه؟
- با اجرای دستور زیر فایل به نام فایل اصلی با پسوند **p** ساخته می شود.
- Run>check model or press F4



57

نحوه استفاده از PAN

- 1- ابتدا یک فایل با پسوند **p** ایجاد می کنیم.
Run>check model
- 2- به PAN رفته و یک Project جدید ایجاد می کنیم.
- 3- با استفاده از Insert Scenario... فایل با پسوند **p** نام سناریو و سایر اطلاعات را وارد می کنیم.
- 4- با گزینه Insert Control به تعداد 5 بار هر یک از سه متغیر **New Tech 1**، **New Tech 2**، **New Tech 3**، and **New Tech All** را به عنوان کنترل در سناریو وارد می کنیم. (مقادیر اولیه آنها وجود دارد).
- 5- با گزینه Insert Response به تعداد سه بار هر یک از سه متغیر **Total Cost**، **percent rejected**، را به عنوان پاسخ در سناریو وارد می کنیم.

58

نحوه استفاده از PAN

6- اگر فرض کنیم برای هر کنترل 1 مقدار به صورت زیر در نظر گرفته می شود آنگاه غیر از حالت اصلی 6 سناریو دیگر خواهیم داشت:

Scenario Properties				Controls						Responses	
S	Name	Program File	Reps	Trunk Line	New Tech 1	New Tech 2	New Tech 3	New Tech All	New Sales	Total Cost	Percent Rejected
1	Best case	6 : Model 06-01.p	0	26	0	0	0	0	0	---	---
2	Trunk line added	6 : Model 06-01.p	0	39	0	0	0	0	0	---	---
3	Add new tech1	6 : Model 06-01.p	0	26	4	0	0	0	0	---	---
4	add new tech2	6 : Model 06-01.p	0	26	0	4	0	0	0	---	---
5	add new tech 3	6 : Model 06-01.p	0	26	0	0	4	0	0	---	---
6	add new tech all	6 : Model 06-01.p	0	26	0	0	0	3	0	---	---
7	add new sales	6 : Model 06-01.p	0	26	0	0	0	0	4	---	---

59

نحوه استفاده از PAN

7- سناریوهای مورد نظر را انتخاب و run می کنیم.

Scenario Properties				Controls						Responses	
S	Name	Program File	Reps	Trunk Line	New Tech 1	New Tech 2	New Tech 3	New Tech All	New Sales	Total Cost	Percent Rejected
1	Best case	6 : Model 06-01.p	110	26	0	0	0	0	0	22241.708	11.654
2	Trunk line added	6 : Model 06-01.p	110	39	0	0	0	0	0	29939.017	7.066
3	Add new tech1	6 : Model 06-01.p	110	26	4	0	0	0	0	23402.897	9.832
4	add new tech2	6 : Model 06-01.p	110	26	0	4	0	0	0	22973.638	9.282
5	add new tech 3	6 : Model 06-01.p	110	26	0	0	4	0	0	23394.082	8.778
6	add new tech all	6 : Model 06-01.p	110	26	0	0	0	3	0	23038.669	7.575
7	add new sales	6 : Model 06-01.p	110	26	0	0	0	0	4	21895.801	10.227

60

نحوه استفاده از PAN

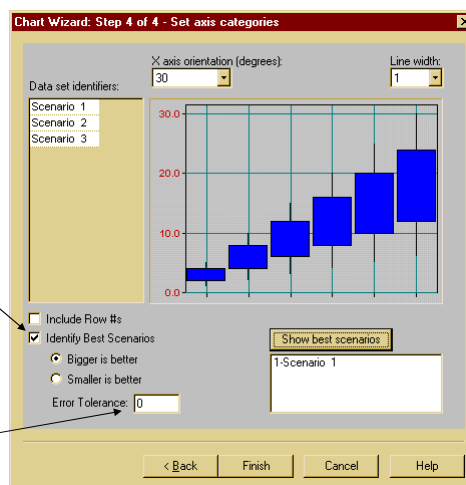
- با استفاده از **Insert chart** خروجیها را تحلیل می کنید.
- در گام اول نمودار **Box plot** را انتخاب نمایید.
- در گام دوم **Total Cost** را انتخاب کنید.
- در گام چهارم **Identify Best Scenarios** را انتخاب نموده و حالت **"Smaller is Better"** را تعیین کنید. همچنین **Error Tolerance** را برابر با صفر قرار دهید.
- روی **"show best scenario"** کلیک کنید.

61

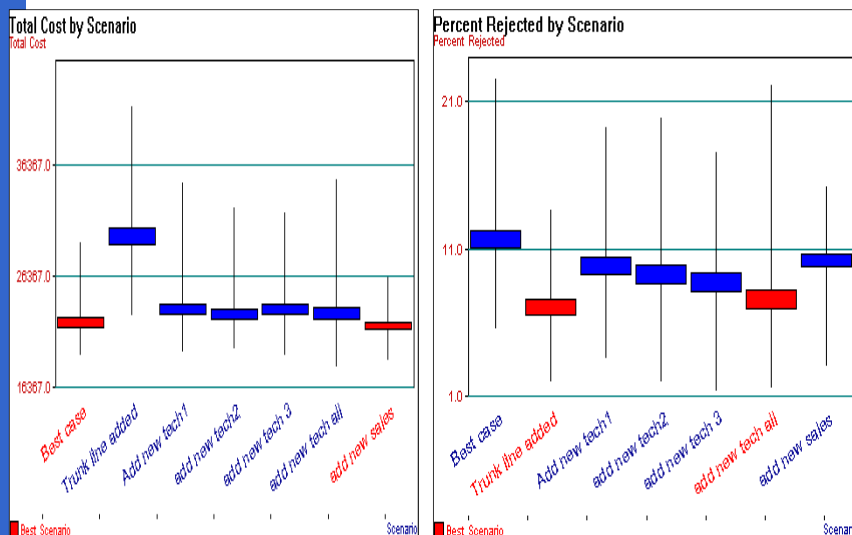
Identify the Best in PAN

Check box causes PAN to identify all scenarios that might be the best

The error tolerance is how far you are willing to be off from including the true best

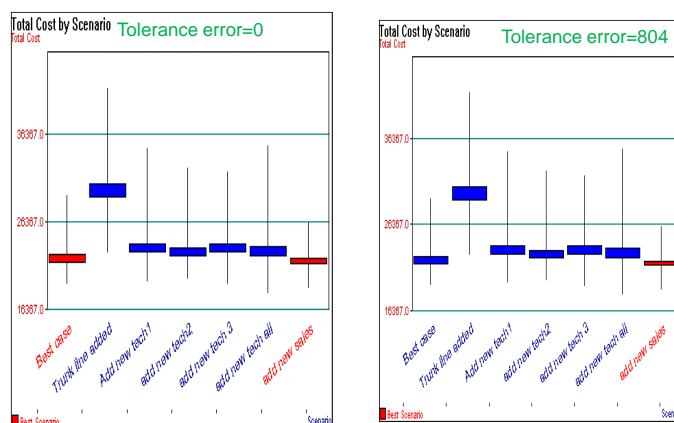


نحوه استفاده از PAN



63

نحوه استفاده از PAN



هرچه خطای تیرانس بیشتر باشد با ریسک بیشتری گزینه های نزدیک بهینه را حذف می کند.
 اگر خطا صفر باشد مثل این است که آزمون فرض با آلفای 05% انجام داده است.
 دو طرف جعبه ها نشان دهنده فاصله اطمینان 95% است.

64

Error Tolerance

- The procedure guarantees, with 95% confidence, to provide a subset of scenaria that contains the best when **Tolerance = 0**
- When **Tolerance > 0**, the subset will contain the best, or a scenario within Tolerance of the best, with 95% confidence

Ture or False? (Error tolerance = 0.05)

- Scenario 1 has largest sample average utilization
- Scenario 1 has the largest expected utilization with 95%
- With 95%, utilization of scenario 1 is within 0.05 of the true maximum utilization
- The expected utilization for scenario 2 (3 or 4) may be larger than the expected utilization for scenario 1
- Box represents 95% confidence interval for utilization of each scenario
- Suppose the box of scenario 1 is from 0.88 to 0.91. It means that 95% data are between 0.88 and 0.91

True or False? (Error tolerance = 0)

- The subset contains the true best scenario with 95% confidence



انتخاب بهترین سناریو با استفاده از OptQuest

ROCKWELL
SOFTWARE

OptQuest[®]
for Arena[®]

جستجوی جواب بهینه

- استفاده از هر یک از روشهای قبل امکان تحلیل چند سناریو محدود را نسبت هزاران سناریوی ممکن فراهم می سازد.
- برای بررسی بهترین حالات از بسته افزودنی OptQuest استفاده میشود.
- به عنوان مثال چنانچه بخواهیم میزان Total cost را مینیمم نماییم به نحویکه بخواهیم متوسط درصد تماسهای رد شده کمتر از 5% شود:

Formulate as an optimization problem:

Minimize Total Cost Objective function is the simulation model

Subject to

$$26 \leq \text{MR}(\text{Trunk Line}) \leq 50$$

$$0 \leq \text{New Sales} + \text{New Tech 1} + \text{New Tech 2} + \text{New Tech 3} + \text{New Tech All} \leq 15$$

$$\text{All} \leq 15$$

$$\text{Percent Rejected} \leq 5$$








input constraint on an output

Constraints on the
input control
(decision)
variables

69

از کجا آغاز کنیم؟

- تمام نقاط موجود در فضای جواب را جستجو کنیم؟ **خیر کل جوابها: 1,356,000**
- اینکه از کجا شروع کنیم سوال بسیار سختی است.
- می توان از جوابهای خوب PAN استفاده کرد.

	Scenario Properties			Controls						Responses		
	S	Name	Program File	Reps	Trunk Line	New Tech 1	New Tech 2	New Tech 3	New Tech All	New Sales	Total Cost	Percent Rejected
1		Best case	6 : Model 06-01.p	110	26	0	0	0	0	0	22241.708	11.654
2		Trunk line added	6 : Model 06-01.p	110	39	0	0	0	0	0	29839.017	7.066
3		Add new tech1	6 : Model 06-01.p	110	26	4	0	0	0	0	23402.897	9.832
4		add new tech2	6 : Model 06-01.p	110	26	0	4	0	0	0	22973.638	9.282
5		add new tech 3	6 : Model 06-01.p	110	26	0	0	4	0	0	23394.082	8.778
6		add new tech all	6 : Model 06-01.p	110	26	0	0	0	3	0	23038.669	7.575
7		add new sales	6 : Model 06-01.p	110	26	0	0	0	0	4	21895.801	10.227

70

به کجا برویم؟

- تمام نقاط موجود در فضای جواب را جستجو کنیم؟ **خیر کل جوابها:**
1,356,000
- جستجو در یک فضای پیوسته روش مشکلی است. سالیان زیادی است که محققین زیادی در این مورد تحقیق نموده و روشهای دقیق و یا ابتکاری یا فراابتکاری پیشنهاد داده شده است.
- نرم افزار **OptQuest** از روش فراابتکاری معروفی به نام **Tabu Search** یا جستجوی ممنوع و روشی دیگر به نام **Scatter Search** استفاده می نماید.
- جواب به دست آمده توسط این روشها یا بهینه است یا مقداری نزدیک به بهینه است.

71

OptQuest

- **Like PAN, OptQuest**
 - Runs as a separate application ... can be launched from Arena
 - “Takes over” the running of your model
 - Asks that you identify the input controls and the output (just one) response objective
- **Unlike PAN, OptQuest**
 - Allows you to specify constraints on the input controls
 - Allows you to specify requirements on outputs
 - Decides itself what input-control-value combinations to try
 - Uses internal heuristic algorithms to decide how to change the input controls to move toward an optimum configuration
- *You specify stopping criterion for the search*

OptQuest

72